Olimpiada Naționala de Matematică
Etapa locală, 11 februarie 2012
Clasa a X-a

Varianta 2

1. a) Fie numerele reale *a, b* cu *a*>0. Determinați intervalele de monotonie ale funcției: $f:(0,\infty)\to R,\ unde\ f(x)=x^3-3ax+b, (\forall)\,x>0;$

b) Determinați valoarea maximă a numărului: $P=\dfrac{a^3+b^3+c^3}{abc}, unde\ a,b,c\in[1,2].$

2.

a. Dacă $a>1$, $x,y\in(1;+\infty)$ şi are loc egalitatea

$$a^x\cdot\log_a x^2+a^y\cdot\log_a y^2=\left(a^x+a^y\right)\left(\log_a x+\log_a y\right)$$

Demonstrați egalitatea *x*=*y*.

b. Demonstrați că dacă $a,x_1,x_2,...,x_n\in(1;+\infty)$ şi $x_1\cdot x_2\cdot...\cdot x_n=a^n$, atunci are loc inegalitatea: $\dfrac{a^{x_1}}{\log_{x_1}a}+\dfrac{a^{x_2}}{\log_{x_2}a}+...+\dfrac{a^{x_n}}{\log_{x_n}a}\ge a^{x_1}+a^{x_2}+...+a^{x_n}$.

3.

a. Să se demonstreze că dacă $x,y\in(0;+\infty)$, atunci $\sqrt[n]{\dfrac{x+y}{2}}\ge\dfrac{\sqrt[n]{x}+\sqrt[n]{y}}{2}$.

b. Să se rezolve ecuația $\sqrt[n]{x+\sqrt[n]{x+1}}=\left(\sqrt[n]{1+\sqrt[n]{2}}-1\right)x+1,\ n\in N, n\ge 2$.

4. Fie *ABC* un triunghi. Pe latura *BC* considerăm punctele *D, E, F* astfel încât astfel încât $BD=DE=EF=FC$. Fie *M* şi *N* puncte pe laturile *AB* şi respectiv *AC*. Să se arate că *MD*, *AE* şi *NF* sunt concurente dacă şi numai dacă $\dfrac{AM}{AB}=\dfrac{AN}{AC}\ne\dfrac{1}{2}$.

G.M./

Notă:
Toate subiectele sunt obligatorii.
Timp de lucru 3 ore.
Fiecare subiect se notează de la 0 la 7 puncte.